

1. Асимптотическое вычисление интегралов с большим параметром.

Асимптотическая последовательность и асимптотическое разложение, их свойства. *Асимптотическое разложение интегралов типа Лапласа: случай  $S' \neq 0$*  Пример: асимптотика интеграла вероятностей. *Асимптотическое разложение интегралов типа Лапласа: случай внутреннего максимума  $S(x)$*  Пример: формула Стирлинга для вещественных  $z > 0$ . Асимптотическое разложение интегралов типа Фурье: случай  $S' \neq 0$ . *Метод стационарной фазы*. Асимптотика функции Эйри при  $x \rightarrow -\infty$ . Формулы стационарной фазы в случае слияния стационарных точек и в многомерном случае. ([С32], гл.5, пп.112–114, 118–119; [О], гл.1,3)

2. Постановка задач математической физики.

Примеры уравнений математической физики. *Классификация уравнений второго порядка*. Краевые и начальные условия. *Корректность задач математической физики, примеры постановок*. Пример Адамара. Характеристики. Классические и обобщенные решения. Формулы Грина. *Интеграл энергии и единственность смешанной задачи для волнового уравнения*. *Единственность смешанной задачи уравнения теплопроводности*. [М], гл.1, гл.2, §1,2,4, гл.3,§1–2, гл.6,§1–2; [С42], гл.1, пп. 30–32; [В2], гл.1, §3–4, гл.6, §33–34; [ТС], гл.1, §1, гл.2, §2)

3. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.

*Единственность внутренних и внешних задач для уравнения Пуассона*. *Уравнение Гельмгольца, сферические и плоские волны; неединственность внутренней и внешней задач*. Собственные функции оператора Лапласа и собственные колебания. *Условия излучения и принцип предельного поглощения; задача дифракции*. ([М], гл.3,§2–4, 6–8; [В2], гл.5, §24,28–31)

4. Специальные функции.

Уравнения, возникающие при разделении переменных в круговых и сферических областях. Сингулярная задача Штурма-Лиувилля. *Собственные числа и функции уравнения Лежандра, свойства полиномов Лежандра*. *Присоединенное уравнение Лежандра при целых  $\mu$* . Уравнение Бесселя. *Ряд для функции  $J_\nu(z)$  при нецелых  $2\nu$ ; связь  $J_{-n}(z)$  и  $J_n(z)$* . *Интегральное представление  $J_\nu(z)$ ; поведение при  $z \rightarrow \infty$* . Понятие о функциях Ханкеля и Неймана, аналогия с формулами Эйлера. *Функция Неймана целого значка, поведение при малых  $z$* . *Задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя и нули функций Бесселя*. ([С32], гл.5, пп.105, гл.6, пп.133–135, 142–153; [ТС], доп.2(ч.1), §1–3)

5. Разделение переменных.

*Неоднородная струна с закрепленными концами: метод Фурье*. Связь с формулой Даламбера. *Теплопроводность полуголощенного стержня, интеграл Фурье*. Собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике. Уравнение Пуассона в прямоугольнике; колебания прямоугольной мембраны. *Сферические функции; собственные функции оператора Лапласа на сфере*. *Задачи Дирихле для уравнения Лапласа на круге и на шаре*. *Собственные функции оператора Лапласа в круге; колебания круглой мембраны*. *Собственные функции оператора Лапласа в шаре*. ([М], гл.2, §3, гл.6,§3,4; [С42], гл.2, пп. 85–86; [В2], гл.3, §13–14,25; [ТС], гл.2, §3, гл.3, §2, гл.4, §3; [С32], гл.6, пп.136–137, 154–156)

Коллоквиум здесь

6. Обобщенные функции.

Пространство пробных функций. *Сингулярные и регулярные обобщенные функции над  $K$ ,  $\delta$ -функция Дирака*. *Сходимость в пространстве  $K'$ ,  $\delta$ -образные последовательности*. Замена переменной. Дифференцирование обобщенных функций, производная разрывной функции. Теорема Л.Шварца. *Формула суммирования Пуассона*. *Носитель обобщенной функции*. *Обобщенное решение уравнения  $x^m y(x) = 0$* . *Обобщенная функция  $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ , формулы Сохоцкого*. *Функция  $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$  и обобщенное решение уравнения  $x^2 y(x) = 1$* . Классическая свертка, свойства. *Обобщенная свертка и условия ее существования, свойства*. Классические и обобщенные решения дифференциальных уравнений. Уравнение  $y' = 0$  имеет только классическое решение. *Фундаментальные решения и обобщенная задача Коши*. *Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля*. Классические прямое и обратное преобразования Фурье, основные свойства, преобразование Фурье классической свертки. *Соотношение неопределенности*. Пространство основных функций  $S$ ; преобразование Фурье в  $S$ . *Обобщенные функции медленного роста, преобразование Фурье в  $S'$ ; обобщенное равенство Парсеваля*. Основные примеры. *Метод Фурье построения фундаментального решения ОДУ с постоянными коэффициентами*. Основные и обобщенные функции многих переменных, замена переменных. *Прямое произведение обобщенных функций*. ([В1], гл.1, §1,2,3,5, гл.2,§6; [В2], гл.2, §5–9; [ГШ], гл.1, §1,2,5,6, гл.2)

## 7. Фундаментальные решения уравнений в частных производных

*Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения.  $\delta$ -функция на сфере; фундаментальное решение волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$ . Фундаментальное решение волнового уравнения в  $\mathbb{R}^2$ . Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Фундаментальное решение операторов Лапласа и Гельмгольца.* ([B2], гл.2, §7, гл.3, §11)

## 8. Обобщенная задача Коши.

Вывод формулы Даламбера методом бегущих волн. *Обобщенная задача Коши для волнового уравнения. Запасывающие потенциалы, распространение волн в различных размерностях, диффузия волн. Формула Даламбера (для однородного уравнения). Принцип Дюамеля. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Обобщенная задача Коши для уравнения теплопроводности.* ([M], гл.1, гл.2, §2,4; [B2], гл.3, §13–14)

## 9. Асимптотические методы.

*Метод ВКБ для одномерного уравнения Шредингера. Идея обоснования. Лучевой метод, уравнения эйконала и переноса. Преобразование Фурье лучевого ряда и распространение разрывов. Интегрирование уравнения эйконала; лучи. Интегрирование уравнения переноса; геометрическая расходимость. Примеры: точечный источник в неоднородной среде, отражение плоской и цилиндрической волн от гладкой границы. Каустики.* ([O], гл.6, §1,3; [BB], гл.1)

Примечание: *Курсивом* выделены вопросы экзаменационных билетов.

## Список литературы

- [M] Линейные уравнения математической физики, под редакцией С.Г.Михлина, 1964.
- [ТС] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики, 1977.
- [B1] В.С.Владимиров. Обобщенные функции в математической физике, 1976.
- [B2] В.С.Владимиров. Уравнения математической физики, 1981.
- [ГШ] И.М.Гельфанд, Г.Е.Шиллов. Обобщенные функции и действия над ними, 1959.
- [C32] В.И.Смирнов. Курс высшей математики, III, ч.2
- [C42] В.И.Смирнов. Курс высшей математики, IV, ч.2
- [O] Ф.Олвер. Введение в асимптотические методы и специальные функции. 1978.
- [A] В.Я.Арсенин. Методы математической физики и специальные функции. 1975.
- [BB] В.М.Бабич, В.С.Булдырев Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. 1972